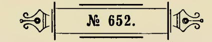
Второй серіи V-го семестра № 4.

# ВѢСТНИКЪ ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ

и

# Элементарной Математики.



№ 652.



## Разложеніе числа на сумму двухъ квадратовъ.

*А. Турчанинова.*

Каждое простое число вида $4n+1$ есть сумма двухъ квадратовъ.

Какъ извѣстно, при простомъ $p$ вида $4n+1$ сравненіе

$$x^2+1 \equiv 0 \pmod{p} \tag{1}$$

имѣетъ рѣшеніе, именно, оно удовлетворяется при $x \equiv \left(\frac{p-1}{2}\right)! \pmod{p}$, т. е.

$$\left[\left(\frac{p-1}{2}\right)!\right]^2+1 \equiv 0 \pmod{p}\,^{*)}. \tag{2}$$

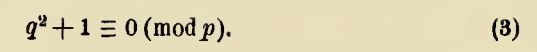
---

*) Въ произведеніи $(p-1)!$ два множителя $k$ и $p-k$, равноотстоящіе отъ начала и конца, обладаютъ тѣмъ свойствомъ, что

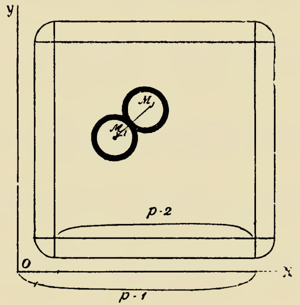
$$-k^2 \equiv k(p-k) \pmod{p}.$$

Полагая здѣсь $k=1, 2, 3, \ldots, \frac{p-1}{2}$ и перемножая полученныя сравненія, на-

Положимъ $q = \left(\frac{p-1}{2}\right)!$ тогда



$$q^2 + 1 \equiv 0 \pmod{p}. \tag{3}$$




Умножимъ обѣ части сравненія (1) послѣдовательно на $1^2$, $2^2$,..., $(p-1)^2$. Мы получимъ $p-1$ сравненій вида:

$$i^2x^2 + i^2 \equiv 0 \pmod{p}, \tag{4}$$

$$[i = 1,\ 2,\ 3, \ldots,\ p-1].$$

---

ходимъ, что

$$(-1)^{\frac{p-1}{2}} \left[\left(\frac{p-1}{2}\right)!\right]^2 \equiv (p-1)! \pmod{p}.$$

Если $p$ есть простое число вида $4n+1$, то $\frac{p-1}{2} = 2n$ есть четное число, а потому изъ послѣдняго сравненія и въ виду теоремы Вильсона находимъ:

$$\left[\left(\frac{p-1}{2}\right)!\right]^2 + 1 \equiv (p-1)! + 1 \equiv 0 \pmod{p}.$$

Сравненія (4) удовлетворяются при $x \equiv q (\mathrm{mod}\, p)$. Поэтому, обозначая через $x_i$ наименьшій положительный вычетъ числа $iq$, получаемъ $p-1$ сравненій:

$$x_i^2 + i^2 \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, p), \quad [i = 1,\ 2,\ 3, \ldots,\ p-1], \tag{5}$$

при чемъ

$$x_i \equiv iq \,(\mathrm{mod}\, p), \quad [0 < x_i < p]. \tag{6}$$

Обратимся къ геометрической интерпретаціи. Взявъ прямоугольную систему координатъ, построимъ $p-1$ точекъ $M_i$ съ координатами $x_i$, $i$, т. е. съ абсциссой равной $x_i$ и ординатой равной $i$ $[i=1,\ 2,\ 3, \ldots,\ p-1]$. Каждая изъ точекъ $M_1\,(x_1,\,1)$; $M_2\,(x_2,\,2)$; $M_3\,(x_3,\,3); \ldots;\ M_{p-1}\,(x_{p-1},\ p-1)$ необходимо должна лежать внутри или на периферіи квадрата со стороною $p-2$. Вершинами этого квадрата будутъ точки $(1,\ 1)$, $(1,\ p-1)$, $(p-1,\ 1)$ и $(p-1,\ p-1)$.

Разсмотримъ квадратъ разстоянія $r_{i,j}$ двухъ какихъ либо изъ точекъ $M$, а именно точекъ $M_i$, $M_j$:

$$r_{i,j}^2 = \overline{M_i M_j}^{\,2} = (x_i - x_j)^2 + (i-j)^2 \tag{7}$$

Вслѣдствіе соотношеній (3) и (6), послѣдовательно получаемъ:

$$(x_i - x_j)^2 + (i-j)^2 \equiv (iq - jq)^2 + (i-j)^2 \equiv (i-j)^2 q^2 + (i-j)^2 \equiv$$
$$\equiv (i-j)^2 (q^2+1) \equiv 0 \ \ (\mathrm{mod}\, p)$$

Отсюда слѣдуетъ, что квадратъ разстоянія $r_{i,j}^2$ двухъ точекъ $M_i$, $M_j$ есть цѣлое число, кратное $p$; $[i,\ j = 1,\ 2,\ 3, \ldots,\ p-1]$ $i \neq j$.

Замѣтимъ, что самое разстояніе $r_{i,j}$ можетъ и не быть цѣлымъ числомъ. Соединяя попарно всевозможными способами $p-1$ точекъ $M_i$, получимъ конечное число разстояній $r_{i,j}$, слѣдовательно, $r_{i,j}$ принимаетъ при этомъ и наименьшее изъ всѣхъ возможныхъ своихъ значеній. Обозначимъ $\mathrm{minimum}\, r_{i,j}$ черезъ $\varrho$; $\varrho^2$ будетъ цѣлое число кратное $p$.

Построимъ $p-1$ равныхъ окружностей $K_i$, имѣющихъ центры соотвѣтственно въ точкахъ $M_i$ $[i=1,\ 2,\ 3, \ldots,\ p-1]$, а радіусомъ $\frac{1}{2}\varrho$. Такъ какъ при всевозможныхъ комбинаціяхъ $i$ и $j$ разстоянія $M_i M_j \geqq \varrho$, то эти окружности не могутъ пересѣкаться, онѣ будутъ расположены одна внѣ другой и лишь въ крайнемъ случаѣ, когда разстояніе $M_i M_j$ достигаетъ minimum'a, касаться. Слѣдовательно, сумма площадей $p-1$ окружностей $K_i$ всегда остается меньше площади замкнутой фигуры, состоящей изъ квадрата, на сторонахъ котораго построены прямоугольники со стороною $\frac{1}{2}\varrho$, и изъ каждой вершины котораго описана четверть окружности также радіусомъ $\frac{1}{2}\varrho$; площадь этой послѣдней равна

$$(p-2)^2 + 4\,(p-2) \cdot \tfrac{1}{2}\varrho + \pi \tfrac{1}{4}\varrho^2$$

и мы получаемъ неравенство:

$$(p-1)\pi\tfrac{1}{4}\varrho^2<(p-2)^2+4(p-2)\,.\,\tfrac{1}{2}\varrho+\pi\,.\,\tfrac{1}{4}\varrho^2$$

или

$$\pi\,.\,\tfrac{1}{4}\varrho^2<(p-2)+4\,.\,\tfrac{1}{2}\varrho.$$

Но $\pi>3$, слѣдовательно

$$\tfrac{3}{4}\varrho^2<p-2+2\varrho,$$

откуда

$$\varrho^2-\tfrac{8}{3}\varrho<\frac{4(p-2)}{3}\ \text{и подавно}\ <\tfrac{4}{3}p.$$

Итакъ, мы пришли къ неравенству второй степени:

$$\varrho^2-\tfrac{8}{3}\varrho-\tfrac{4}{3}p<0.$$

Рѣшаемъ это неравенство

$$\left(\varrho-\frac{4}{3}-\sqrt{\frac{16}{9}+\frac{4}{3}p}\right)\left(\varrho-\frac{4}{3}+\sqrt{\frac{16}{9}+\frac{4}{3}p}\right)<0.$$

Такъ какъ второй множитель всегда положителенъ, то мы получаемъ:

$$\varrho<\frac{4}{3}+\sqrt{\frac{16}{9}+\frac{4}{3}p}.$$

Далѣе, при $p>32$, вторая часть этого неравенства непремѣнно меньше $2p$. Въ самомъ дѣлѣ:

$$p>32;\ \ \frac{2}{3}p>\frac{8}{3}\sqrt{2p};\ \ \frac{16}{9}+\frac{4}{3}p<2p-\frac{8}{3}\sqrt{2p}+\frac{16}{9};$$

$$\frac{16}{9}+\frac{4}{3}p<\left(\sqrt{2p}-\frac{4}{3}\right)^2;\ \ \sqrt{\frac{16}{9}+\frac{4}{3}p}<\sqrt{2p}-\frac{4}{3};$$

$$\frac{4}{3}+\sqrt{\frac{16}{9}+\frac{4}{3}p}<\sqrt{2p}:\ \ \varrho<\sqrt{2p}.$$

Итакъ, при $p>32$, разстояніе $\varrho<\sqrt{2p}$, а квадратъ его $\varrho^2$ меньше $2p$. Но $\varrho^2$, какъ мы отмѣтили выше, есть цѣлое число, кратное $p$. Стало быть, это возможно лишь при $\varrho^2=p$. Далѣе, $\varrho^2$ есть одно изъ значеній $r^2_{i,j}$. Обращаясь же къ равенству (7), убѣждаемся теперь, что $\varrho^2$, а слѣдовательно и $p$ должно непремѣнно разлагаться въ сумму квадратовъ двухъ цѣлыхъ чиселъ.

Теорема доказана для всѣхъ простыхъ чиселъ $>32$, остается исчерпать случаи: $p=5$, $13$, $17$, $29$ т. е. случаи простыхъ чиселъ вида $4n+1$ меньшихъ $32$. Это сдѣлать нетрудно:

$$5=1^2+2^2;\quad 13=2^2+3^2;\quad 17=4^2+1;\quad 29=5^2+2^2.$$

Итакъ, каждое простое число вида $4n+1$ есть сумма двухъ квадратовъ.

Теорема эта высказана въ первый разъ Ферматомъ; Эйлеръ далъ доказательство. Предлагаемое въ настоящей замѣткѣ доказательство этой теоремы отличается отъ обычнаго*) простотой и связью съ геометрической интерпретаціей. Идея связывать теоремы теоріи чиселъ съ геометрической интерпретаціей принадлежитъ знаменитому математику Минковскому, однако, въ его сочиненіяхъ изложенное доказательство не встрѣчается.

Теорема эта по существу является частнымъ случаемъ теоріи квадратичныхъ формъ.

---

# Съѣздъ Британской ассоціаціи въ Манчестерѣ.

Рѣчь, читанная сэромъ Ф. В. Дайсономъ (F. W. Dyson), предсѣдателемъ секціи математики и физики.

Хотя въ настоящее время наши мысли поглощены войной, съѣздъ Британской ассоціаціи въ Манчестерѣ доказываетъ, что мы считаемъ своевременнымъ сдѣлать, какъ всегда нашъ годичный обзоръ успѣховъ наукъ. Я не буду поэтому оправдываться, почему я выбралъ для своей рѣчи, ту же тему, какую взялъ бы въ обыкновенное время. Предметъ моей рѣчи, дѣйствительно, весьма далекъ отъ войны; я хочу представить Вамъ обзоръ того, какимъ образомъ астрономы своими телескопами и спектроскопами изслѣдовали небо, и разсказать Вамъ о полученныхъ ими выводахъ относительно того, что Гершель (Herschell) назвалъ „строеніемъ небесъ".

Наши знанія о неподвижныхъ звѣздахъ, — такъ называли ихъ старые астрономы, — сравнительно недавняго происхожденія и возникли изъ двухъ источниковъ: 1) путемъ измѣренія небольшихъ измѣненій въ положеніяхъ звѣздъ на небѣ и 2) посредствомъ анализа свѣта, получаемаго отъ нихъ и количественнымъ его измѣреніемъ. Для этой цѣли были использованы многочисленные инструменты современной обсерваторіи. Желаніе разсмотрѣть слабые видимые объекты и особенно настоятельная потребность въ бо́льшей точности наблюденій вызвали непрерывное совершенствованіе астрономическихъ инструментовъ какъ въ отношеніи силы, такъ и точности. Методы, усовершенствованные для наблюденій немногихъ звѣздъ, были расширены такъ, чтобы ихъ можно было примѣнить къ большому числу звѣздъ. По этой причинѣ можетъ казаться, что звѣздная астрономія нѣкоторое время подвигалась лишь медленно. Болѣе

---

*) См. Веберъ и Вельштейнъ. „Энциклопедія элементарной математики". Томъ I, стр. 341. Перев. съ нѣм. подъ ред. и съ примѣч. прив.-доц. В. Ф. Кагана. Изд. „Mathesis". Одесса.

быстрые успѣхи послѣднихъ лѣтъ вызваны накопленіемъ данныхъ, которыми мы обязаны ряду поколѣній астрономовъ, и постепеннымъ возрастаніемъ силы и совершенства нашихъ инструментовъ.

Пониманіе звѣзднаго міра, какъ цѣлаго, впервые стало возможнымъ лишь послѣ обзора ихъ количества и распредѣленія; Гершель, который построилъ первые большіе телескопы, который изслѣдовалъ небо съ неутомимой энергіей и искусствомъ и сдѣлалъ смѣлые выводы изъ своихъ наблюденій по справедливости считается творцомъ звѣздной астрономіи. Въ своемъ большомъ трудѣ „О строеніи неба“ Гершель излагаетъ правила, которыми онъ руководствовался; я приведу ихъ здѣсь, такъ какъ они могутъ служить прекраснымъ девизомъ для всѣхъ тѣхъ, кто, занимается наблюдательными науками.

„Но сперва я позволю себѣ замѣтить, что мы лишь въ томъ случаѣ можемъ надѣяться на какіе-нибудь успѣхи въ этомъ весьма тонкомъ изслѣдованіи, если будемъ избѣгать двухъ противоположныхъ крайностей, въ одинаковой мѣрѣ опасныхъ. Если мы дадимъ свободу нашему воображенію и будемъ строить свои собственные міры, то не будетъ удивительно, что мы уклонимся далеко отъ пути истины и природы; но эти міры исчезнутъ подобно Картезіанскимъ вихрямъ, которые уступили мѣсто болѣе цѣлесообразнымъ теоріямъ. Съ другой стороны, если мы будемъ громоздить наблюденія на наблюденія, не пытаясь выводить изъ нихъ не только строго достовѣрныя заключенія, но также и вѣроятныя соображенія, то мы погрѣшимъ противъ истинной цѣли, для которой только и производились эти наблюденія. Я постараюсь держаться надлежащей середины; но если бы мнѣ пришлось уклониться отъ нея въ сторону, то я не желалъ бы впасть во вторую погрѣшность“. Слѣдуя этому взгляду, Гершель изслѣдовалъ „количества звѣздъ“; именно онъ считалъ звѣзды, видимыя черезъ его большой телескопъ, въ различныхъ частяхъ неба. Онъ пришелъ къ заключенію, что звѣзды образуютъ скопленіе, которое простирается на неизвѣстное, но конечное разстояніе, которое значительно больше въ плоскости Млечнаго Пути, чѣмъ въ перпендикулярномъ къ нему направленіи. Гершель принималъ, что это разстояніе въ 497 разъ больше, чѣмъ разстояніе до Сиріуса. Онъ, не колеблясь, высказалъ теорію, что нѣкоторыя туманности были подобными же скопленіями звѣздъ; изъ нихъ ближайшимъ, судя по размѣрамъ, является Андромеда. Въ распоряженіи Гершеля не было средствъ для сужденія о размѣрахъ звѣздной системы, хотя онъ, вѣроятно, предполагалъ, что параллаксъ Сиріуса порядка 1.

Хотя нѣкоторыя предположенія Гершеля допускаютъ возраженія, но результаты, полученные имъ, въ общихъ чертахъ вѣрны. Я попытаюсь изложить вамъ вкратцѣ нѣкоторые изъ главныхъ методовъ, примѣнявшихся для достиженія болѣе точныхъ знаній о размѣрахъ и строеніи этого „островообразнаго міра“. Вообще говоря, больше всего мы знаемъ о тѣхъ звѣздахъ, которыя къ намъ ближе. Если разстояніе звѣзды измѣрено, то легко найти ея координаты, ея скорость въ направленіи, перпендикулярномъ къ лучу зрѣнія, и ея яркость. Въ случаѣ двойной звѣзды, орбита которой извѣстна, можно опредѣлить также массу. Къ сожалѣнію, лишь весьма немногія звѣзды близки къ намъ настолько, чтобы возможно было съ нѣкоторой точностью опредѣлить ихъ разстояніе. Если примемъ за единицу разстояніе, соотвѣтствующее параллаксу въ 1″, ее иногда называютъ

„парсекъ“*), т. е. увеличенное въ 200000 разъ разстояніе земли отъ солнца, — то можно производить довольно точныя опредѣленія до разстоянія въ 25 такихъ единицъ для болѣе далекихъ разстояній взмѣренія будутъ лишь весьма неточныя.

Для значительно большихъ разстояній среднія данныя можно получить на основаніи собственныхъ движеній звѣздъ; среднія разстоянія извѣстныхъ классовъ звѣздъ, напримѣръ, звѣздъ данной величины или звѣздъ, имѣющихъ спектръ опредѣленнаго типа, можно найти съ нѣкоторой достовѣрностью, если разстояніе не превышаетъ 500 единицъ; при разстояніяхъ же, вдвое большихъ, измѣренія становятся весьма шаткими. Въ предѣлахъ тѣхъ же разстояній можно вычислить также густоту звѣздъ въ пространствѣ, какъ функцію разстоянія, процентъ звѣздъ въ различныхъ предѣлахъ яркости, общее направленіе движенія звѣздъ и нхъ средняя скорость.

Если звѣзда обладаетъ достаточной яркостью, то скорость ея по направленію къ землѣ или отъ земли можно измѣрить при любомъ разстояніи. Изученіе этихъ скоростей доставляетъ дополнительныя данныя, которыя не могутъ быть получены изъ собственныхъ движеній звѣздъ и подтверждаютъ другія результаты, полученные этимъ послѣднимъ способомъ. При разстояніяхъ, превышающихъ 1000 единицъ наши свѣдѣнія, вообще, весьма шатки. Приходится полагаться на тѣ данныя, которыя можно получить, изучая число и цвѣтъ звѣздъ и количества нхъ въ различныхъ частяхъ неба.

## Параллаксъ.

Начнемъ съ ближайшей къ намъ части пространства, въ которой параллаксы звѣздъ подаются опредѣленію. Въ этомъ отношеніи начало новой эры въ звѣздной астрономіи положили Бессель (Bessell), Струве (Struve) и Гендерсонъ (Henderson), которымъ удалось опредѣлить звѣздные параллаксы. Лотъ, который астрономы уже многіе вѣка запускали въ глубины міроваго пространства, впервые нащупалъ дно — таково значеніе этого удачнаго измѣренія разстояній трехъ отдѣльныхъ звѣздъ! До конца девятнадцатаго вѣка главнымъ источникомъ нашихъ знаній о разстояніяхъ звѣздъ было примѣненіе геліометра, введенное Бесселемъ; съ его помощью были довольно хорошо опредѣлены параллаксы примѣрно ста звѣздъ. Для ближайшей къ намъ части пространства этотъ обзоръ достаточно полонъ, чтобы можно вывести заключеніе о среднихъ разстояніяхъ звѣздъ между собой — отъ $2^1/_2$ до 3 единицъ. Опредѣленія параллакса двойныхъ звѣздъ съ извѣстными орбитами привели къ заключенію, что массы звѣздъ колеблются сравнительно въ не очень большихъ предѣлахъ, а именно между $^1/_{40}$ и 40, если принять за единицу массу солнца.

Вычисленіе яркости звѣздъ, разстоянія которыхъ удалось измѣрить, показало, что яркость звѣздъ, въ противоположность ихъ массѣ, колеблется между очень широкими предѣлами. Такъ, напримѣръ, Сиріусъ излучаетъ въ 48 разъ больше свѣта, чѣмъ солнце, а Грумбриджъ 34 лишь одну сотую часть сравнительно съ солнцемъ. Этимъ, однако, отнюдь не исчерпывается степень колебаній; Канопусъ, напримѣръ, обладаетъ, примѣрно, въ 10000 разъ большей

*) Терминъ, выражающій, очевидно, сокращеніе слова „параллаксъ-секунда“.

яркостью, чѣмъ солнце. Но у звѣздъ, близкихъ къ солнечной системѣ абсолютная яркость повидимому мѣняется въ зависимости отъ типа спектра. Такъ, Сиріусъ типа A, синяя водородная звѣзда, имѣетъ въ сорокъ восемь разъ бóльшую яркость, чѣмъ солнце; Проціонъ типа F5, звѣзда, болѣе синяя, чѣмъ солнце, но менѣе синяя, чѣмъ Сиріусъ, имѣетъ яркость въ 10 разъ бóльшую, чѣмъ солнце; звѣзда α Кентавра, приближающаяся къ типу солнца, имѣетъ вдвое большую яркость. Звѣзда 61 Лебедя типа K5, болѣе красная, чѣмъ солнце, имѣетъ въ 10 разъ меньшую яркость, тогда какъ еще болѣе красная звѣзда типа Ma, Gr 34 имѣетъ лишь въ 100 разъ меньшую яркость. Изъ числа звѣздъ, находящихся по сосѣдству съ солнечной системой, одна треть обладаетъ большей яркостью, а двѣ трети меньшей яркостью, чѣмъ солнце. Яркость убываетъ съ измѣненіемъ типа спектра отъ A до M, т. е. съ переходомъ отъ синихъ звѣздъ къ краснымъ.

Эти три результата относительно густоты звѣздъ въ пространствѣ, объ ихъ массѣ и яркости получены путемъ изслѣдованія очень малаго числа звѣздъ и показываютъ, какое огромное значеніе имѣли точныя опредѣленія звѣздныхъ параллаксовъ. Коль скоро извѣстенъ параллаксъ, всѣ прочія данныя наблюденій сейчасъ же находятъ себѣ примѣненіе. Къ началу нашего вѣка были извѣстны съ болѣе или менѣе достаточной точностью параллаксы около восьмидесяти звѣздъ. Къ счастью, благодаря примѣненію фотографическихъ методовъ, это число въ настоящее время быстро возрастаетъ. За послѣдніе два года или даже менѣе были опредѣлены и опубликованы параллаксы почти двухъ сотъ звѣздъ. Въ этомъ году (1915) образовалась коммиссія Американскаго Астрономическаго Общества, подъ предсѣдательствомъ проф. Шлезингера (Schlesinger), для координированія работы шести или семи американскихъ и одной или двухъ европейскихъ обсерваторій. Вся программа обнимаетъ 1100 звѣздъ; изъ этого числа выше 400 измѣрены уже болѣе, чѣмъ одной обсерваторіей. Можно ожидать новыхъ результатовъ со скоростью до двухъ сотъ звѣздъ въ годъ, и нужно поэтому надѣяться на быстрый ростъ нашихъ знаній о звѣздахъ, находящихся въ ближайшемъ сосѣдствѣ съ нашей системой.

## Скорость по лучу зрѣнія.

Опредѣленіе скоростей по лучу зрѣнія было начато впервые Гюггинсомъ (Huggins) въ началѣ шестидесятыхъ годовъ, но надежные результаты впервые получены лишь послѣ того, какъ Фогель въ 1890 г. ввелъ фотографическіе методы. Съ того времени удалось достигнуть еще большей степени точности, и теперь скорость яркой звѣзды съ рѣзкими линіями можетъ быть опредѣлена съ точностью до 1/4 *км.* въ секунду (если не считать одной систематической погрѣшности, происхожденіе которой еще не вполнѣ выяснено). Такъ какъ средняя скорости этихъ звѣздъ заключены между 10 и 20 *км.* въ секунду, то получается относительная точность, вообще болѣе высокаго порядка, чѣмъ при опредѣленіяхъ параллакса или другихъ величинъ звѣздной астрономіи. Въ этомъ направленіи работаетъ цѣлый рядъ обсерваторій въ Соединенныхъ Штатахъ и въ Европѣ, а также въ Южной Америкѣ, въ Капской землѣ и въ Канадѣ. Особенно же широкую программу начертала себѣ Ликская обсерваторія

съ проф. Кэмпбеллемъ (Campbell) во главѣ, обладающая большимъ телескопомъ и прекраснымъ спектроскопомъ; большое значеніе имѣютъ также превосходныя климатическія условія этой мѣстности. На этой обсерваторіи и въ ея Чилійскомъ отдѣленіи для наблюденія звѣздъ южнаго полушарія (у Cerro San Christobal) были опредѣлены скорости свыше чѣмъ 1200 наиболѣе яркихъ звѣздъ неба. Помимо другихъ задачъ, успѣшно выполненныхъ этой обсерваторіей, ей удалось опредѣлить направленіе и скорость движенія солнца. Что касается направленія, то опредѣленіе его послужило подтвержденіемъ результатовъ, полученныхъ изъ собственныхъ движеній; но скорость можетъ быть точно вычислена только съ помощью этого метода. Это количество входитъ какъ основная константа почти во всѣ изслѣдованія, относящіяся къ собственному движенію, и по Кэмпбеллю равно около 19,5 *км.* въ секунду, или въ годъ — разстояніе, превышающее въ 4,1 раза разстояніе земли отъ солнца; въ этой оцѣнкѣ есть, правда, нѣкоторая неточность, зависящая отъ систематической погрѣшности неизвѣстнаго происхожденія.

Наблюденія лучевыхъ скоростей показали, въ какихъ предѣлахъ лежатъ скорости звѣздъ, и дали намъ нѣкоторое понятіе объ нхъ распредѣленіи. Важнѣйшій изъ полученныхъ результатовъ, и при томъ нѣсколько неожиданнаго характера, состоитъ въ слѣдующемъ: среднія скорости звѣздъ, если не считать движенія солнца, возрастаютъ въ зависимости отъ типа спектра. Такъ, напримѣръ, звѣзды типа B, такъ называемыя геліевыя звѣзды, обладающія наивысшей температурой, имѣютъ среднюю лучевую скорость лишь 6,5 *км.* въ секунду; водородныя же звѣзды типа A имѣютъ среднюю скорость 11 *км.* въ секунду, солнечныя звѣзды — 15 *км.* въ секунду, тогда какъ у красныхъ звѣздъ типа K и M средняя скорость достигла нѣсколько большей величины — 17 *км.* въ секунду. Далѣе, немногочисленныя планетарныя туманности, т. е. сгущенныя туманности со свѣтлыми линейчатыми спектрами, имѣютъ среднюю скорость до 25 *км.* въ секунду. Что эти результаты въ существенныхъ чертахъ точны, не можетъ подлежать никакому сомнѣнію, такъ какъ они вполнѣ подтверждаются разсмотрѣніемъ собственныхъ движеній. Тѣмъ не менѣе понять ихъ очень трудно. Совершенно непонятнымъ является, почему звѣзды высокой температуры должны обладать особенно большими скоростями. Д-ръ Гэльмъ (Helm) пытался объяснить это такъ: такъ какъ геліевыя звѣзды обладаютъ большими массами, то эти результаты указываютъ на равномѣрное распредѣленіе энергіи. Однако, разстоянія между звѣздами столь велики, что представляется невозможнымъ приписать указанное обстоятельство ихъ взаимодѣйствію. Проф. Эддингтонъ (Eddington) предполагаетъ, что скорости могутъ служить указаніемъ той части пространства, въ которой образовались звѣзды (напримѣръ, звѣзды съ малой массой въ отдаленныхъ частяхъ пространства), и представляютъ собой кинетическую энергію, которую пріобрѣли звѣзды при достиженіи своего настоящаго положенія.

Тѣ звѣзды, лучевыя скорости которыхъ удалось опредѣлить, вообще говоря, обладаютъ яркостью выше пятой величины. Въ настоящее время подверглись наблюденію менѣе яркія звѣзды. Въ обсерваторіи Монтъ-Вильсонъ профессоръ Адамсъ (Adams) опредѣлилъ скорости звѣздъ съ извѣстными параллаксами, такъ какъ весьма выгодно получить, если возможно, полныя данныя отно-

сительно звѣздъ. Распространеніе опредѣленій по лучу зрѣнія и на менѣе яркія звѣзды, несомнѣнно дастъ обильную жатву цѣнныхъ результатовъ, и потому въ этомъ направленіи работаетъ цѣлый рядъ обсерваторій, къ которымъ въ скоромъ времени присоединятся еще и другія.

## Собственныя движенія.

Такъ какъ собственное движеніе звѣзды опредѣляется путемъ сравненія ея положеній въ два различныхъ момента, то по мѣрѣ возрастанія промежутковъ времени наши познанія о собственныхъ движеніяхъ звѣздъ пріобрѣтаютъ все большую точность. Звѣзды сѣвернаго полушарія, видимыя невооруженнымъ глазомъ, Брадлей (Bradley) наблюдалъ съ точностью въ 1755 г. Въ первую половину девятнадцатаго столѣтія производились наблюденія многихъ тысячъ звѣздъ малой яркости примѣрно до 9-ой величины. Около 1875 г. были произведены вторичныя наблюденія звѣздъ по обширному плану, выполненному подъ руководствомъ Германскаго астрономическаго общества. Въ настоящее столѣтіе большое число звѣздъ ярче девятой величины подверглось повторному наблюденію въ связи съ фотографической съемкой неба. По отношенію къ яркимъ звѣздамъ были использованы всѣ имѣющіеся матеріалы, и собственныя движенія этихъ звѣздъ удалось опредѣлить хорошо; для менѣе же яркихъ звѣздъ опредѣленіе постепенно подвергается впередъ.

Собственныя движенія колеблются въ широкихъ предѣлахъ и неправильнымъ образомъ какъ въ отношеніи скорости, такъ и направленія. Гершель (Herschell) замѣтилъ въ движеніи нѣкоторыхъ звѣздъ стремленіе къ одной точкѣ неба и объяснилъ эту закономѣрность движеніемъ солнечной системы въ противоположномъ направленіи. Оказалось, однако, что различные методы даютъ несогласные между собою результаты, и это разногласіе долгое время оставалось совершенно необъяснимымъ; и лишь десять лѣтъ тому назадъ на съѣздѣ нашей секціи Британской Ассоціаціи въ Южной Африкѣ этотъ вопросъ былъ разрѣшенъ въ докладѣ проф. Каптейна (Kapteyn). Онъ показалъ *), что собственныя движенія обнаруживаютъ въ общемъ тенденцію къ двумъ различнымъ точкамъ неба, а не къ одной только, какъ нужно было бы ожидать въ томъ случаѣ, если бы движенія звѣздъ, сами по себѣ совершенно случайныя и неправильныя, лишь наблюдались съ точки, находящейся въ быстромъ движеніи. Отсюда Каптейнъ заключилъ, что звѣзды въ общемъ текутъ въ двухъ противоположныхъ направленіяхъ. Интересно указать, что это великое открытіе было сдѣлано съ помощью простого графическаго разсмотрѣнія собственныхъ движеній звѣздъ въ различныхъ областяхъ неба, послѣ того какъ авторъ потратилъ много времени на разсмотрѣніе и критику различныхъ методовъ, примѣнявшихся для того, чтобы опредѣлить направленіе солнечнаго движенія. Этотъ вопросъ былъ затѣмъ разработанъ болѣе яснымъ и точнымъ образомъ благодаря

*) Ср. статью проф. Каптейна „Строеніе вселенной". „Вѣстникъ" № 609.

аналитической формулировкѣ, данной проф. Эддингтономъ*) и послѣ него проф. Шварцшильдомъ (Schvartzschild).

Это ученіе о звѣздныхъ потокахъ подтверждается наблюденіями скоростей по лучу зрѣнія. За исключеніемъ геліевыхъ звѣздъ, оно примѣнимо ко всѣмъ звѣздамъ, которыя настолько близки къ намъ, что допускаютъ опредѣленія собственныхъ движеній. Достовѣрно можно видѣть, что это звѣздное теченіе охватываетъ звѣзды на разстояніи двухсотъ или трехсотъ парсековъ; можетъ быть оно простирается еще дальше, но я не думаю, чтобы мы въ настоящее время имѣли на это достаточныя доказательства. Проф. Турнеръ (Turner) указалъ, что сходимость собственныхъ движеній еще не доказываетъ непремѣнно движеній въ параллельныхъ направленіяхъ и высказалъ предположеніе, что звѣздные потоки представляютъ собой движенія звѣздъ по направленію къ нѣкоторому центру и отъ него. Но, какъ мнѣ кажется, то обстоятельство, что лучевыя скорости согласуются съ собственными движеніями противорѣчитъ этому предположенію и показываетъ, что звѣздныя потоки свидѣтельствуютъ о приблизительной параллельности въ движеніяхъ разсматриваемыхъ звѣздъ по двумъ противоположнымъ направленіямъ. Такъ какъ значительное большинство этихъ звѣздъ сравнительно близко къ намъ, то возможно, что эта параллельность принадлежитъ, главнымъ образомъ этимъ звѣздамъ и указываетъ намъ главныя направленія орбитальныхъ движеній сосѣднихъ къ намъ звѣздъ. Опытъ теоріи въ этомъ направленіи, какъ и теорія проф. Турнера, заключаетъ въ себѣ допущеніе, что солнце находится на нѣкоторомъ разстояніи отъ центра солнечной системы.

Совсѣмъ другого характера открытіе было сдѣлано проф. Боссомъ (Boss) въ 1908 г. Онъ посвятилъ много лѣтъ составленію большого каталога содержащаго самыя точныя положенія и движенія 6200 звѣздъ, которыя можно было вывести изъ всѣхъ имѣющихся наблюденій. По плану автора за этимъ каталогомъ, опубликованнымъ Институтомъ Кэрнеги (Carnegie), долженъ былъ послѣдовать еще болѣе обширный каталогъ, который охватывалъ бы точныя положенія и движенія всѣхъ звѣздъ до седьмой величины. Производя эту работу, проф. Боссъ нашелъ, что сорокъ или пятьдесятъ звѣздъ, разсѣянныхъ по обширной области вблизи созвѣздія Тельца, движутся всѣ по направленію къ одной и той же точкѣ и приблизительно съ одинаковой скоростью. Онъ вывелъ отсюда заключеніе, что эти звѣзды движутся всѣ по параллельнымъ направленіямъ съ одинаковой линейной скоростью; для нѣкоторыхъ изъ этихъ звѣздъ это предположеніе было провѣрено опредѣленіемъ ихъ лучевыхъ скоростей. Изъ этихъ данныхъ Боссу удалось вывести разстояніе каждой звѣзды и, слѣдовательно, ея положеніе въ пространствѣ. Существованіе большой группы звѣздъ, отдѣленныхъ одна отъ другой очень большими разстояніями и имѣющихъ, однако, всѣ одинаковое движеніе въ пространствѣ, есть весьма замѣчательное явленіе. Какъ замѣтилъ проф. Эддингтонъ, оно показываетъ намъ, что гравитаціонное дѣйствіе одной звѣзды на другую очень мало, и что движеніе

*) См. „Успѣхи астрономіи". Сборникъ статей подъ ред. прив.-доц. А. Р. Орбинскаго. Изд. „Mathesis", Одесса.

каждой звѣзды опредѣляется соединеннымъ притяженіемъ ея массою всѣхъ прочихъ звѣздъ, вмѣстѣ взятыхъ. Послѣ того были открыты нѣкоторыя интересныя движущіяся скопленія. Для всѣхъ звѣздъ, принадлежащихъ къ этимъ скопленіямъ были найдены разстоянія, а изъ этихъ послѣднихъ выведены яркости и скорости отдѣльныхъ звѣздъ т. е. такіе признаки, которые обычно можно опредѣлить лишь у звѣздъ, гораздо болѣе къ намъ близкихъ.

Собственныя движенія являются главнымъ источникомъ нашихъ знаній о разстояніяхъ тѣхъ звѣздъ, которыя находятся за предѣлами досягаемости для опредѣленія съ помощью годичнаго параллакса. Если бы намъ было извѣстно, что та или другая звѣзда находится въ покоѣ, ея разстояніе можно было бы вычислить по перемѣщенію ея видимаго положенія, вызванному поступательнымъ движеніемъ солнечной системы. Такъ какъ разстояніе отъ земли до солнца солнечная система проходитъ 410 разъ въ столѣтіе, то это даетъ перемѣщеніе въ 1″ для звѣзды на разстояніи въ 500 единицъ (парсековъ). Каптейнъ примѣнилъ этотъ методъ для опредѣленія разстояній геліевыхъ звѣздъ, такъ какъ ихъ скорости настолько малы въ сравненіи со скоростями солнечной системы, что ими можно пренебречь. Но, вообще, среднія разстоянія можно опредѣлить только для звѣздныхъ группъ такихъ размѣровъ, когда мы въ правѣ принять что частныя движенія въ среднемъ взаимно нейтрализуются. Напримѣръ, возможно опредѣлить среднее разстояніе звѣздъ типа А или звѣздъ пятой величины, или какой-нибудь другой желаемой группы. Этимъ путемъ Каптейнъ нашелъ, исходя отъ звѣздъ Брадлея, что средній параллаксъ звѣздъ величины $m$ дается формулой:

$$\log \pi_m = -1{,}108 - 0{,}125m.$$

Эта зависимость въ соединеніи съ другимъ закономъ, который полученъ изъ наблюденій и выражаетъ число звѣздъ, какъ функцію ихъ величины, приводитъ къ опредѣленію густоты звѣздъ въ пространствѣ на различныхъ разстояніяхъ отъ насъ, а также къ „закону яркости“, т. е. о процентѣ звѣздъ съ различной абсолютной яркостью. Этимъ путемъ проф. Зейлигеръ (Seeliger) и Каптейнъ показали, что по мѣрѣ удаленія отъ солнечной системы густота звѣздъ сильно убываетъ. Мнѣ кажется чрезвычайно необходимымъ изслѣдовать это явленіе болѣе подробно, отдѣльно въ различныхъ частяхъ неба. Общее математическое рѣшеніе основныхъ вопросовъ, возникающихъ при разработкѣ астрономической статистики, дано проф. Шварцшильдомъ. Его изслѣдованія имѣютъ величайшее значеніе, такъ какъ показываютъ точную зависимость законовъ густоты, яркости и скорости отъ статистическихъ фактовъ, которые могутъ быть собраны наблюденіемъ. Здѣсь мы не будемъ, однако, излагать различные статистическіе выводы, такъ какъ читателя, незнакомаго съ общей математической ситуаціей этихъ вопросовъ, они могутъ, пожалуй, спутать.

Разсмотрѣніе собственныхъ движеній въ связи со спектральнымъ типомъ звѣздъ подтверждаетъ малыя среднія скорости водородныхъ звѣздъ и еще меньшія скорости геліевыхъ звѣздъ, найденныя съ помощью наблюденій по лучу зрѣнія. Если разсматривать звѣзды до извѣстнаго предѣла кажущейся величины, скажемъ до 6-ой, или между извѣстными предѣлами, напримѣръ, отъ 8-ой до

9-ой величины, то оказывается, что солнечныя звѣзды гораздо ближе какъ красныхъ, такъ и синихъ. И красныя, и синія звѣзды, слѣдовательно, должны обладать большей дѣйствительной яркостью, чѣмъ звѣзды солнечныя. Что касается синихъ звѣздъ, то это обстоятельство согласуется съ результатами, полученными изъ наблюденiи параллаксовъ. Красныя же звѣзды, повидимому, состоятъ изъ двухъ классовъ, одного — большей яркости и другого — малой, и врядъ ли можетъ служить достаточнымъ объясненіемъ тотъ фактъ, что собраніе звѣздъ большей яркости, чѣмъ звѣзды какой-либо данной видимой величины включаетъ въ себѣ очень яркія звѣзды, находящiяся на большомъ разстояніи, и только тѣ звѣзды малой яркости, которыя очень близки къ намъ.

Значеніе этихъ фактовъ, указанное проф. Гертцшпрунгомъ (Hertzsprung) и проф. Рёсселемъ (Russel), весьма важно для вопроса о звѣздной эволюціи. Съ геометрической точки зрѣнія моего доклада эти факты важны тѣмъ, что помогаютъ классифицировать чрезвычайно обширную область яркостей различныхъ звѣздъ. Если трактовать вопросъ болѣе или менѣе широко, то звѣзды А, или водородныя звѣзды, въ среднемъ имѣютъ дѣйствительную яркость на пять величинъ бо́льшую, чѣмъ солнце, тогда какъ область ихъ величинъ такова, что половина числа звѣздъ не превышаетъ по своей величинѣ $^3/_4$ средняго значенія. Звѣзды типа М, очень красныя звѣзды, бываютъ двухъ типовъ. Однѣ изъ нихъ такой же яркости какъ звѣзды А и представляютъ сходную область около средняго значенія, которое на 5 величинъ ярче солнца. Другія же звѣзды, напротивъ, имѣютъ среднюю дѣйствительную яркость на пять величинъ слабѣе солнечной и съ тѣмъ же вѣроятнымъ уклоненіемъ на $^3/_4$ величины. Между типами М и А есть два класса, въ которыхъ разстояніе между звѣздами уменьшается по мѣрѣ того, какъ звѣзды становятся болѣе синими. Факты въ защиту этого взгляда весьма убѣдительно представлены проф. Рёсселемъ (Nature, май 1914 г.). Если эта гипотеза вѣрна, какъ мнѣ кажется, въ ея пользу можно сказать очень много, — то кажущаяся величина вмѣстѣ съ типомъ спектра дастъ намъ очень хорошія приближенія для разстояній тѣхъ звѣздъ, которыя по своей дальности не даютъ намъ возможности точно опредѣлить ихъ собственныя движенія.

Когда изучались собственныя движенія болѣе яркихъ звѣздъ, небо разсматривалось, какъ одно цѣлое. Теперь же, когда намъ извѣстны направленіе и скорость движенія солнечной системы, мы можемъ надѣяться, что по мѣрѣ того, какъ намъ станетъ извѣстнымъ все бо́льшее и бо́льшее число собственныхъ движеній, различныя части неба будутъ изучаться каждая отдѣльно. Этимъ путемъ мы получимъ болѣе детальныя свѣдѣнія о теченіи, а также о среднихъ разстояніяхъ звѣздъ различной величины во всѣхъ частяхъ неба, благодаря чему удастся опредѣлить, какъ мѣняется густота звѣздъ въ пространствѣ по различнымъ направленіямъ. Существенныхъ результатовъ слѣдуетъ ожидать, кромѣ того, и въ другомъ направленіи, а именно, отъ изслѣдованія зависимости между собственными движеніями и спектральнымъ типомъ. Въ Гарвардъ-Колледжѣ миссъ Кэнонъ (Cannon), подъ руководствомъ проф. Пикеринга (Pickering), работаетъ надъ изготовленіемъ каталога, дающаго типъ спектра каждой звѣзды

ярче девятой величины. Было бы очень желательно опредѣлить собственныя движенія всѣхъ этихъ звѣздъ. Этого можно будетъ достигнуть въ весьма значительной степени, если будетъ изученъ весь имѣющійся матеріалъ.

## Фотометрія и цвѣта звѣздъ.

При изученіи болѣе далекихъ частей неба собственныя движенія уже не могутъ служить надежнымъ руководителемъ и мы зависимъ отъ данныхъ, которыя могутъ быть получены путемъ изслѣдованія свѣта звѣздъ съ помощью звѣздной фотометріи, путемъ опредѣленій цвѣта и изученія звѣздныхъ спектровъ. Вообще говоря, мы стараемся посредствомъ наблюденій болѣе близкихъ звѣздъ открыть достаточное количество данныхъ относительно ихъ дѣйствительной яркости, которыя давали бы намъ возможность по кажущейся величинѣ болѣе удаленныхъ звѣздъ дѣлать выводы объ ихъ разстояніяхъ. Наиболѣе поразительнымъ примѣромъ этого метода можетъ служить произведенное проф. Герцшпрунгомъ опредѣленіе разстоянія малой Магеллановой туманности. Зная характеристики перемѣнныхъ Цефеидъ, найденныхъ въ этой туманности миссъ Ливитъ (Leavitt), и ихъ кажущуюся величину, проф. Герцшпрунгъ вывелъ отсюда, что разстояніе туманности равно 10000 парсекамъ.

Въ послѣдніе годы много вниманія удѣлялось звѣздной фотометріи. Въ 1899 г. проф. Пикерингъ опубликовалъ Revised Harvard Photometry, гдѣ даны величины всѣхъ звѣздъ, болѣе яркихъ, чѣмъ звѣзды величины 6,5. Въ 1907 г. Мюллеръ (Müller) и Кемпфъ (Kempf) дополнили опредѣленіе 14109 звѣздъ сѣвернаго полушарія, яркости выше 7,5. Въ 1908 г. въ Гарвардѣ былъ изданъ каталогъ 36682 звѣздъ яркости ниже 6,5. Эти опредѣленія имѣютъ еще то значеніе, что даютъ мѣру для сравнительной оцѣнки величинъ, найденныхъ глазомъ.

Благодаря трудамъ проф. Пикеринга и его коллегъ въ Гарвардѣ, проф. Шварцшильда, проф. Паркгорста (Parkhorst) въ Джерксѣ, проф. Сиреса (Seares) въ Монтъ-Вильсонѣ и др., фотографическое опредѣленіе величинъ звѣздъ быстро шагнуло впередъ. До сихъ поръ еще не издано ни одного полнаго каталога фотографическихъ опредѣленій, который соотвѣтствовалъ бы каталогу Revised Harvard Photometry, хотя значительныя части неба и нѣкоторыя области его, какъ Плеяды, подверглись тщательному изученію. Однако, опредѣлить фотографическія величины какихъ-либо интересующихъ насъ звѣздъ — задача сравнительно простая, если найдены величины достаточно большого числа звѣздъ, могущихъ служить образцомъ для сравненія. Надежную и однообразную шкалу даетъ въ значительной мѣрѣ примѣненіе экстра-фокальныхъ изображеній, рѣшетокъ и экрановъ впереди объектива, далѣе, изученіе вліянія различныхъ отверстій и различной продолжительности экспозиціи.

Въ Гарвардѣ и Монтъ-Вильсонѣ изданы каталоги сравнительныхъ величинъ звѣздъ вблизи сѣвернаго полюса, обнимающіе звѣзды примѣрно до 20-ой величины. Въ области отъ 10-ой до 16-ой величины эти опредѣленія очень

хорошо согласуются между собой, но въ промежуткѣ между 6 ой и 10-ой величинами есть расхожденіе на 0,4 величины, которое пока еще не выяснено.

Однообразная и точная шкала величины имѣетъ фундаментальное значеніе при расчетахъ количества звѣздъ. Цѣль такихъ вычисленій двоякая: 1) опредѣлить, какъ измѣняется число звѣздъ въ различныхъ частяхъ неба и 2) установить отношеніе числа звѣздъ каждой величины къ числу звѣздъ предшествующей величины въ одной и той же области неба. Расчеты звѣздъ по измѣреніямъ сэровъ Дж. и В. Гершеля, числа, содержащіяся въ Bonn Durchmusterung, далѣе, вычисленія, произведенныя проф. Челоріа (Celoria) и новѣйшія вычисленія по пластинкамъ Франклина-Адамса, сдѣланныя д-ромъ Шэпманомъ (Chapman) и г. Мелотте (Melotte), всѣ согласно показываютъ непрерывное возрастаніе числа звѣздъ по мѣрѣ перехода отъ полюса Млечнаго Пути къ самому Млечному Пути. Значеніе этого факта заключается въ томъ, что онъ показываетъ тѣсную связь между Млечнымъ Путемъ и болѣе близкими къ намъ звѣздами. Млечный Путь не представляетъ собою систему звѣздъ, стоящую особнякомъ отъ другихъ звѣздъ, но есть основная форма нашей „островообразной вселенной".

Фотометрическія наблюденія пріобрѣли большое значеніе еще и въ другомъ отношеніи, именно, благодаря различіямъ между фотографическими и зрительными величинами. Обыкновенная фотографическая пластинка болѣе чувствительна къ синему свѣту, чѣмъ глазъ, и различіе между фотографической и зрительной величиной звѣзды является показателемъ цвѣта. Какъ показываетъ наблюденіе, показатель цвѣта находится въ тѣсной связи съ типомъ спектра. Проф. Сиресъ, основываясь на показателяхъ цвѣта, доказалъ, что звѣзды, становясь блѣднѣе, дѣлаются все болѣе и болѣе красными. То же самое проф. Герцшпрунгъ нашелъ посредствомъ рѣшетки впереди объекта. Между звѣздами 17-ой величины (зрительной) Сиресъ нашелъ девять съ показателемъ цвѣта меньшимъ, чѣмъ 0,7; это приблизительно показатель цвѣта звѣзды солнечнаго типа, т. е. близко къ срединѣ области отъ синихъ звѣздъ до красныхъ.

Это можетъ происходить по тремъ причинамъ. Это могутъ быть яркія, но весьма отдаленныя красныя звѣзды; или это блѣдныя красныя звѣзды въ родѣ находящихся непосредственно близъ солнца; либо, наконецъ, здѣсь имѣетъ мѣсто поглощеніе синяго свѣта. Въ какой мѣрѣ вліяетъ каждая изъ этихъ причинъ, сказать невозможно. Красныя звѣзды 9-ой и 10-ой величины почти всѣ представляютъ собой очень яркія, но отдаленныя тѣла; однако, возможно, что звѣзды 17-ой величины содержатъ въ большомъ количествѣ звѣзды малой яркости.

Поглощеніе свѣта въ пространствѣ весьма мало, и пока еще не вполнѣ опредѣлено. Проф. Каптейнъ и г. Джонсъ (Jons), путемъ сравненія показателей цвѣта звѣздъ съ большимъ и малымъ собственнымъ движеніемъ приходятъ къ заключенію, что различіе между поглощеніемъ фотографическаго и зрительнаго свѣта составляетъ единицу величины на 2000 парсековъ. Проф. Адамсъ непосредственно изслѣдовалъ этотъ вопросъ; онъ получилъ спектры близкихъ и отдаленныхъ звѣздъ, тождественные по своимъ линіямъ и разсмотрѣлъ распредѣленіе сплошного свѣта. Этотъ прямой методъ сравненія показалъ, что болѣе далекія звѣзды всегда являются болѣе слабыми въ фіолетовомъ свѣтѣ. Но такъ

какъ оба эти изслѣдованія показываютъ, что очень яркія звѣзды — въ дѣйствительности нѣсколько болѣе синія, чѣмъ менѣе яркія звѣзды того же спектральнаго типа, то дѣйствіе указанныхъ двухъ причинъ не можетъ быть расчленено впредь до дальнѣйшихъ изслѣдованій. Этотъ вопросъ важенъ въ томъ отношеніи, что въ нѣкоторыхъ случаяхъ онъ можетъ служить для опредѣленія разстояній очень отдаленныхъ тѣлъ, если извѣстенъ типъ спектра.

Должно признаться, что пока мы еще очень мало знаемъ о болѣе отдаленныхъ частяхъ „островообразной вселенной". Такъ, напримѣръ, мы располагаемъ врядъ ли болѣе, чѣмъ догадками относительно разстоянія Млечнаго Пути, или, скажемъ, о томъ, какая часть его ближе къ намъ, каковы его движенія, и т. д. Но тѣмъ не менѣе въ послѣдніе нѣсколько лѣтъ мы очень много узнали о строеніи небесъ. Примѣняемые теперь методы обѣщаютъ дать намъ довольно хорошую модель, показывающую координаты и скорости звѣздъ, а также ихъ дѣйствительныя температуры и количество излучаемаго ими свѣта. Мы должны прилежно накоплять точныя данныя, и, параллельно съ этимъ, по мѣрѣ накопленія данныхъ, мы должны постоянно пытаться объяснять ихъ. Чѣмъ точнѣе и подробнѣе мы будемъ знать звѣздную систему въ ея нынѣшнемъ состояніи, тѣмъ легче будетъ для насъ динамическое и физическое изученіе ея исторіи и эволюціи.

---

# Третій Всероссійскій Съѣздъ преподавателей математики.

**Вопросы, подлежащіе обсужденію на 3-мъ Всероссійскомъ Съѣздѣ преподавателей математики, предположено разбить на слѣдующія группы:**

## I. Общія основанія постановки курса математики въ средней школѣ.

1. Сравнительная постановка курса математики у насъ и въ другихъ странахъ.

2. Раздѣленіе курса общеобразовательной средней школы на двѣ ступени: а) на ступень, общую для всѣхъ учащихся и б) на вторую ступень, „допускающую спеціализацію, приноровленную къ индивидуальнымъ способностямъ учащихся и удовлетворяющую требованіямъ высшей школы *).

## II. Конструкція разныхъ отдѣловъ математики въ средней школѣ.

Элементы анализа и аналитической геометріи въ средней школѣ.

3. Возможныя конструкціи курса анализа, въ виду признанія резолюціей

*) См. резолюціи 4, 5, 6 Перваго Съѣзда преподавателей математики.

третьей Второго Съѣзда необходимости введенія даннаго курса въ среднюю школу всѣхъ типовъ.

4. Подготовка учащихся среднихъ классовъ къ курсу анализа.

5. Возможныя конструкціи курса аналитической геометріи, въ виду признанія резолюціей ... и т. д. (см. вопросъ 3-й).

Ариѳметика.

6. Требованія по предмету ариѳметики, предъявляемыя къ дѣтямъ, поступающимъ въ первый классъ средней школы.

7. Составъ курса ариѳметики въ младшихъ классахъ, въ частности вопросъ о пропедевтическомъ курсѣ дробей и вопросъ о рѣшеніи уравненій первой степени съ однимъ неизвѣстнымъ и численными коэффиціентами.

8. Вопросы ариѳметическаго содержанія въ курсѣ среднихъ классовъ.

9. Дополнительно-повторительный курсъ ариѳметики въ одномъ изъ старшихъ классовъ.

Алгебра.

10. Вопросъ о возможномъ сокращеніи курса алгебры (неопредѣленныя уравненія; кубическій корень; непрерывныя дроби и пр.).

11. Функціональныя зависимости въ курсѣ алгебры. Графики.

12. Ученіе объ ирраціональномъ числѣ въ средней школѣ.

13. Введеніе въ курсъ алгебры элементовъ исчисленія вѣроятностей въ связи съ комбинаторнымъ анализомъ.

Геометрія.

14. Необходимо ли раздѣленіе курса геометріи въ средней школѣ на циклы и вопросъ о числѣ цикловъ?

1-ый циклъ (пропедевтическій, начальный курсъ).

15. Постановка перваго цикла геометріи въ различныхъ учебныхъ заведеніяхъ и достигаемые этимъ курсомъ результаты.

16. Опредѣленія и разсужденія доказательнаго характера въ первомъ циклѣ геометріи.

17. Развитіе пространственныхъ представленій въ первомъ циклѣ.

2-ой циклъ.

18. Задачи и цѣли 2-го (и 3-го) цикловъ курса элементарной геометріи.

19. Вопросъ о сокращеніи курса Евклида, объ элементахъ геометріи начертательной и проективной.

20. Вопросъ о сліяніи планиметріи со стереометріей (фюзіонизмъ).

21. Вопросъ о функціональной точкѣ зрѣнія въ геометріи.

22. При наличіи курса анализа, въ какую форму должно вылиться въ систематическомъ курсѣ геометріи ученіе о вычисленіи тѣхъ геометрическихъ протяженій, гдѣ въ настоящее время пользуются методомъ предѣловъ?*).

---

Опредѣленные интегралы?

25. Какое значеніе можетъ имѣть ознакомленіе учащихся съ логической возможностью геометріи Лобачевскаго?

Тригонометрія.

24. Необходимо ли раздѣленіе тригонометріи на два цикла (по типу реальныхъ училищъ)?

## III. Подготовка преподавателей.

27. Необходимо всесторонне выяснить вопросъ о соотношеніи между математическимъ и педагогическимъ образованіемъ преподавателя математики.

## IV. 26. Провѣрка знаній (репетиции, переводные, выпускные и конкурсные экзамены).

## V. Общіе и частные вопросы преподаванія математики.

27. О соотношеніи между логическимъ и интуитивнымъ элементами въ курсѣ математики.
28. Эстетическій элементъ въ математикѣ.
29. Роль наглядныхъ пособій на различныхъ ступеняхъ обученія математикѣ. „Лабораторный" методъ при обученіи математикѣ.
30. Что дала экспериментальная психологія для обученія математикѣ?
31. Самостоятельныя занятія учащихся (чтеніе книгъ математическаго содержанія, рефераты, практическія занятія и пр.).
32. Содержаніе задачниковъ (см. резолюцію 3-ью Перваго Съѣзда: въ какой мѣрѣ въ нихъ „должны входить данныя изъ области физики, механики, космографіи ...").

## Къ организаціи 3-го Съѣзда.

А. Учрежденіе научной секціи въ добавленіе къ тѣмъ секціямъ, которыя были на 1-омъ и 2-омъ Съѣздахъ.

Б. Исполненіе резолюціи V-ой 2-го Съѣзда — „Постоянное Бюро Съѣздовъ преподавателей математики".

В. Докладъ о дѣятельности Международной Комиссіи.

Г. Докладъ о номографіи спеціалиста по математической статистикѣ (научная секція).

# БИБЛІОГРАФІЯ.

## I. Рецензіи.

А. И. Никитинъ. *Первая ступень изъ геометріи для начальной школы.* Изд. 2-е. Книгоиздательство т-ва И. Д. Сытина. Москва, 1915.

Въ предисловіи авторъ говоритъ. „Ученикъ современной начальной народной школы долженъ познакомиться съ элементарными свѣдѣніями изъ геометріи. Усвоеніе этихъ свѣдѣній существенно необходимо ученику для его будущей практической дѣятельности (въ качествѣ земледѣльца, торговца, приказчика и пр.)“. Мы полагаемъ, что подходить только съ этой мѣркой къ курсу наглядной геометріи для начальной школы — значитъ рѣшать вопросъ односторонне. Въ циклѣ предметовъ, преслѣдующихъ цѣли общаго развитія, намъ кажется, должно быть отведено мѣсто и курсу наглядной геометріи. Предметъ этотъ долженъ обратить вниманіе дѣтей на форму тѣлъ, выдѣлить существенные элементы, которые лежатъ въ основѣ измѣренія площадей и объемовъ. Правильно, конечно, и указаніе автора на практическую важность курса геометріи.

Отсутствіе этого предмета ведетъ къ такой ненормальности: дѣти являются въ школу съ достаточно большимъ количествомъ наблюденій надъ формой; школа вмѣсто того, чтобы фиксировать ихъ вниманіе на этой сторонѣ внѣшняго міра, дать ихъ наблюдательности нѣкоторую пищу, дать имъ осмыслить свои непосредственныя впечатлѣнія — школа вмѣсто всего этого совершенно игнорируетъ этотъ запасъ дѣтскихъ знаній.

Общее впечатлѣніе отъ книжки таково, что указанной стороны она не имѣла въ виду — правда въ вину автору, по нашему мнѣнію, ставить этого нельзя. При условіяхъ существованія нашей начальной школы — непродолжительности ея курса — многаго сдѣлать нельзя и думать о гармоническомъ развитіи всѣхъ сторонъ ребенка, о томъ, чтобы пробудить всѣ задатки, всѣ дремлющія силы его, врядъ ли возможно.

Въ рецензіи, мы поэтому будемъ подходить къ книжкѣ съ той точки зрѣнія, на какой, повидимому, стоитъ авторъ: дать свѣдѣнія изъ области геометріи, которыя будутъ полезны въ жизненной практикѣ питомцамъ начальной школы.

Книжка знакомитъ съ основными понятіями, фигурами, формулами для площадей и объемовъ, даетъ рѣшеніе нѣсколькихъ задачъ на построеніе и указываетъ нѣсколько задачъ изъ практической геометріи. Въ концѣ книжки имѣется небольшое число недурныхъ задачъ (22); задачи освѣщаютъ жизненный характеръ сообщенныхъ свѣдѣній.

Мы послали бы автору упрекъ въ антипедагогичности пріемовъ. Отдѣлъ о площадяхъ, правда, знакомитъ съ главными, часто встрѣчающимися фигурами, но сообщаются только формулы; то же самое мы находимъ въ отдѣлѣ объ объемахъ — разсмотрѣны призма, пирамида, цилиндръ, конусъ, шаръ, но пріемъ тотъ же, что и при площадяхъ. Намъ кажется, что въ нормальной школѣ это недопустимо ни при какихъ условіяхъ — не о логическихъ доказательствахъ можетъ идти рѣчь при занятіяхъ съ десятилѣтними дѣтьми, но и ихъ надо пріучать обоснованно дѣлать выводы; заключенія должны зиждиться на матеріалѣ имъ доступномъ — на опытѣ; заставлять же ихъ довольствоваться тѣмъ, что такъ написано въ книжкѣ, такъ сказалъ учитель — значитъ несомнѣнно калѣчить дѣтскую природу.

Въ книжкѣ есть крайности противоположнаго характера — опредѣленія основныхъ понятій: прямой линіи, угла, твердаго тѣла, объема. Прямая, напримѣръ, опредѣляется какъ линія, которая всегда идетъ въ одномъ направленіи.

На той ступени развитія, о какой можетъ идти рѣчь въ данномъ случаѣ, опредѣленія вообще не нужны, не говоря уже о рискованности приведенныхъ въ книжкѣ. Рѣчь можетъ идти лишь о правильныхъ образныхъ представленіяхъ, о выдѣленіи путемъ соотвѣтствеивыхъ упражненій существенныхъ признаковъ этихъ образовъ.

Нѣкоторыя мѣста учебника производятъ странное впечатлѣніе, мы бы сказали, своей случайностью. Въ нихъ, по нашему, проявляется отсутствіе выдержаннаго основного тона книжки. Точно по пути обронены нѣкоторыя свѣдѣнія; если бы они и не были указаны, то цѣльность труда нисколько бы не пострадала.

Такое впечатлѣніе производитъ, напримѣръ, слѣдующее мѣсто: „діагонали прямоугольника и квадрата равны между собою; въ точкѣ пересѣченія діагонали дѣлятся пополамъ". Авторъ могъ бы возразить, что онъ указываетъ существенное свойство данной фигуры; но тогда мы бы спросили, почему, примѣрно, онъ ни словомъ не обмолвился о свойствахъ равнобедреннаго треугольника. Аналогичное замѣчаніе мы бы сдѣлали относительно задачъ на построеніе. Ихъ приведено всего четыре. Какую цѣль могъ преслѣдовать авторъ? Научить обращенію съ циркулемъ и линейкой? Но для этого число упражненій, очевидно, слишкомъ недостаточно.

Рѣшеніе задачи: „раздѣлить уголъ пополамъ" излишне сложно.

Въ заключеніе мы бы хотѣли указать слѣдующее: намъ кажется, что всякая попытка дать, такъ сказать, по пути достаточное знакомство съ геометрическими образами и ихъ примѣненіемъ къ вопросамъ жизни, должна страдать антипедагогичностью, такъ какъ за отсутствіемъ достаточнаго количества времени на этотъ предметъ все должно быть сдѣлано на спѣхъ. Единственно правильнымъ выходомъ намъ представляется слѣдующее — курсъ наглядной геометріи долженъ имѣть мѣсто въ начальной школѣ; не касаясь вопроса о томъ, долженъ ли этотъ курсъ фигурировать какъ отдѣльный предметъ, или проходиться въ связи с другимъ, мы считаемъ существенно важнымъ, чтобы на него было отведено достаточно времени, чтобы при его прохожденіи не нарушались элементарныя педагогическія требованія.

*И. Дубъ.*

## Книги и брошюры, поступившія въ редакцію.

О всѣхъ книгахъ, присланныхъ въ редакцію „Вѣстника", подходящихъ подъ его программу и заслуживающихъ вниманія, будетъ данъ отзывъ.

**К. Б. Пеніожкевичъ.** *Основанія аналитической геометріи.* Курсъ дополнительнаго класса реальныхъ училищъ. Изд. 2-ое В. В. Думнова. Петроградъ 1915. Стр. VIII + 199. Ц. 1 руб.

**С. И. Шохоръ-Троцкій.** *Методика ариѳметики для учителей среднихъ учебныхъ заведеній.* Изд. 4-ое пересмотрѣнное. Изд. т-ва Сытина. Москва, 1916. Стр. 524. Ц. 2 руб.

**А. П. Перли.** *Числа изъ жизни.* Сборникъ ариѳметическихъ задачъ и упражненій. Изд. т-ва Сытина. Москва, 1915. Вып. I. Стр. 64. Ц. 20 к. Вып. II. Стр. 104. Ц. 25 к. Вып. III. Стр. 63. Ц. 20 к. Вып. IV. Стр. 64. Ц. 20 к.

**Ф. Н. Индриксонъ.** *Начальныя свѣдѣнія изъ физики.* Ч. I. Стр. 122. Ц. 50 к. Ч. II. Стр. 176. Ц. 65 к. Изд. т-ва Сытина. Москва.

**В. А. Барницкій.** *Очерки по методикѣ начальнаго курса ариѳметики.* Лекціи, читанныя на педагогическихъ курсахъ Херсонскаго губ. земства. 1915. Стр. VI + 260. 1 руб. 50 к.

# ЗАДАЧИ.

Подъ редакціей профессора **Е. Л. Буницкаго**.

Редакція проситъ не помѣщать на одномъ и томъ же листѣ бумаги 1) дѣловой переписки съ конторой, 2) рѣшеній задачъ, напечатанныхъ въ „Вѣстникѣ", и 3) задачъ, предлагаемыхъ для рѣшенія. Въ противномъ случаѣ редакція не можетъ поручиться за то, чтобы она могла своевременно принять мѣры къ удовлетворенію нуждъ корреспондентовъ.

Редакція проситъ лицъ, предлагающихъ задачи для помѣщенія въ „Вѣстникѣ", либо присылать задачи вмѣстѣ съ ихъ рѣшеніями, либо снабжать задачи указаніемъ, что лицу, предлагающему задачу, неизвѣстно ея рѣшеніе.

**№ 315** (6 сер). Рѣшить уравненіе

$$\left|\frac{z^2+3}{z^2+z+2}\right|+\left|\frac{z-1}{z^2+z+2}\right|=1,$$

гдѣ $z$ — искомое комплексное число.

*X.* (Петроградъ).

**№ 316** (6 сер.). Среди всѣхъ треугольниковъ, имѣющихъ данное основаніе $a$ и данный периметръ $2p$, найти такой треугольникъ, для котораго отношеніе радіусовъ вписаннаго и описаннаго круговъ достигаетъ наибольшаго значенія.

***R.***

**№ 317** (6 сер.). Рѣшить систему уравненій

$$(x^2+xy+y^2)\sqrt{x^2+y^2}=a,$$

$$(x^2-xy+y^2)\sqrt{x^2+y^2}=b,$$

*Л. Закутинскій* (Черкассы).

**№ 318** (6 сер.). Четыре прямыя, проходящія черезъ вершины $A$, $B$, $C$, $D$ тетраэдра и черезъ точку $O$, встрѣчаютъ соотвѣтственно противоположныя вершинамъ грани въ точкахъ $A'$, $B'$, $C'$, $D'$. Доказать, что

$$\frac{OA'}{AA'}+\frac{OB'}{BB'}+\frac{OC'}{CC'}+\frac{OD'}{DD'}=1.$$

(Заимств.).

# РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

## Отдѣлъ I.

**№ 236** (6 сер.). *Рѣшить уравненіе*

$$x^2 + xy + y^2 = x^2y^2$$

*въ числахъ цѣлыхъ.*

Прибавивъ къ обѣимъ частямъ по $xy$, приводимъ уравненіе къ виду

$$(1)\quad (x+y)^2 = xy\,(xy+1).$$

Если бы ни одно изъ чиселъ $xy$ и $xy+1$ не равнялось нулю, то $xy$ и $xy+1$ были бы два отличныхъ отъ нуля и отличающихся на единицу числа, а потому они были бы взаимно простыми. Такъ какъ произведеніе этихъ взаимно простыхъ чиселъ, согласно съ равенствомъ (1), есть точный квадратъ, то абсолютная величина каждаго изъ нихъ есть точный квадратъ, что невозможно, такъ какъ эти числа отличны отъ нуля и такъ какъ они различаются на единицу. Значитъ или (2) $xy=0$ или же $xy+1=0$, т. е. (3) $xy=-1$. Изъ равенствъ (2) и (3) слѣдуетъ, что справедливо одно изъ предположеній $x=0$, $y=0$, $x=1$, $x=-1$. Полагая $x=0$, находимъ изъ даннаго уравненія, что $y=0$, а полагая $y=0$, получимъ $x=0$; точно такъ же при $x=1$ или $x=-1$ получаемъ соотвѣтственно изъ даннаго уравненія, что $y=-1$ или $y=1$. Поэтому $x=0$, $y=0$; $x=1$, $y=-1$; $x=-1$, $y=1$ суть всѣ цѣлыя рѣшенія даннаго уравненія.

*X.* (Саратовъ); *И. Брюхановъ* (Петроградъ); *П. Волохинъ* (Ялта); *М. Виленскій* (Одесса); *N. N.* (Тифлисъ); *Флавіанъ Д.* (Дѣйствующая армія); *Н. Гольдбуртъ* (Вильна); *Н. К-новъ* (Петроградъ); *Л. Гейлеръ* (Харьковъ); *О. Бивальдъ* (Славянскъ); *В. Ревзинъ* (Сумы); *А. Сердобинскій* (Харьковъ).

**№ 241** (6 сер.). *Пусть* $\varphi(n)$ *обозначаетъ число цѣлыхъ чиселъ, не большихъ* n *и взаимно простыхъ съ* n. *Доказать равенство*

$$\varphi(a)\,\varphi(b) = \varphi(M)\,\varphi(d),$$

*гдѣ* M *и* d *суть наименьшее кратное и общій наибольшій дѣлитель чиселъ* a *и* b.

Въ задачѣ **№ 226** (6 сер.), помѣщенной въ № 621 «Вѣстника» и рѣшенной въ № 633 «Вѣстника», и въ задачѣ **№ 230** (6 сер.), помѣщенной въ № 622 «Вѣстника» и рѣшенной въ № 634 «Вѣстника», установлены для всякихъ двухъ цѣлыхъ положительныхъ чиселъ $a$ и $b$ равенства

$$\varphi(ab) = \frac{\varphi(a)\,\varphi(b)\,d}{\varphi(d)} \quad \text{и} \quad \varphi(ab) = d\,\varphi(M),$$

гдѣ $d$ — общій наибольшій дѣлитель, а $M$ — наименьшее кратное чиселъ $a$ и $b$. Изъ этихъ равенствъ слѣдуетъ, что $\dfrac{\varphi(a)\,\varphi(b)\,d}{\varphi(d)} = d\varphi(M)$, откуда

$$\varphi(a)\,\varphi(b) = \varphi(d)\;\varphi(M).$$

*М. Виленскій* (Одесса); *Н. К-новъ* (Петроградъ); *Л. Гейлеръ* (Харьковъ) *Д. Чижевскій* (Александрія); *В. Ревзинъ* (Сумы).

**№ 265** (6 сер.). *Найти общій видъ ирраціональныхъ чиселъ* x, *обладающихъ тѣмъ свойствомъ, что число* $\frac{1}{x}$, *если его записать въ видѣ безконечной десятичной дроби, изображается, начиная съ первой значащей цифры, тѣми же цифрами и въ томъ же порядкѣ, какъ и число* x.

По условію числа $x$ и $\frac{1}{x}$, будучи ирраціональными, отличаются при десятичномъ ихъ изображеніи лишь мѣстомъ запятой. Поэтому

$$x = 10^n \cdot \frac{1}{x},$$

откуда $x^2 = 10^n$, гдѣ $n$ — нѣкоторое цѣлое число. Слѣдовательно $x = \sqrt{10^n}$, при чемъ необходимо предположить, что $n$ нечетно, такъ какъ $x$ — ирраціональное число; это предположеніе и достаточно, такъ какъ при $n$ нечетномъ и $x$ и $\frac{1}{x}$ оба ирраціональны. Итакъ $x = \sqrt{10^{2m+1}}$, гдѣ $m$ — любое цѣлое число — положительное, нуль или отрицательное. Итакъ искомыя числа суть $\sqrt{10}$, $\sqrt{1000}$, $\sqrt{100000}, \ldots$, $\sqrt{0{,}1}$, $\sqrt{0{,}001}$ и т. д.

*В. Поповъ* (Валки, Харьк. губ.); *Л Гейлеръ* (Харьковъ); *В. Ревзинъ* (Сумы).

**№ 267** (6 сер.). *Пусть* a — *цѣлое нечетное число, не кратное* 5, *а* n — *любое цѣлое положительное число. Доказать, что двѣ послѣднія цифры чиселъ* $a^{20n+1}$ *и* a *одинаковы.*

Разсмотримъ разность $a^{20n} - 1$. Представивъ ее въ видѣ $(a^2)^{10n} - 1$, находимъ, что она кратна разности $a^2 - 1 = (a-1)(a+1)$, а потому разность $a^2 - 1$ кратна 4, такъ какъ въ виду нечетности числа $a$, каждое изъ чиселъ $a-1$ и $a+1$ четно; поэтому число $a^{20n} - 1$ кратно 4. Обозначая вообще черезъ $\varphi(m)$ число чиселъ не большихъ $m$ и взаимно простыхъ съ $m$, находимъ, что $\varphi(25) = 5 \cdot 4 = 20$. Число $a$, не кратное 5, взаимно простое съ числомъ 25. Поэтому, по теоремѣ Эйлера, разность $a^{\varphi(25)} - 1$, т. е. $a^{20} - 1$, кратно 25. Но $a^{20n} - 1 = (a^{20})^n - 1$, откуда слѣдуетъ, что разность $a^{20n} - 1$ дѣлится на $a^{20} - 1$, а потому она кратна 25, такъ какъ число $a^{20} - 1$ кратно 25. Разность $a^{20n} - 1$, будучи кратна взаимно простыхъ чиселъ 4 и 25, кратна ихъ произведенія, т. е. 100. Итакъ разность $a^{20n} - 1$ кратна 100, а потому и произведеніе $a(a^{20n} - 1)$, равное разности $a^{20n+1} - a$, кратно 100. Значитъ разность $a^{20n+1} - a$ кратна 100, откуда слѣдуетъ, что числа $a^{20n+1}$ и $a$ имѣютъ двѣ одинаковыя послѣднія цифры.

*А.* (Одесса); *В. Поповъ* (Валки, Харьк. губ).

**№ 268** (6 сер.). *Доказать тожество*

$$\left(\frac{p_{n+2}}{r_n} - 1\right)\left(1 - \frac{r_{n-1}}{p_{n+1}}\right) = \left(\frac{q_{n+2}}{q_n} - 1\right)\left(1 - \frac{q_{n-1}}{q_{n+1}}\right),$$

*гдѣ* $p_{n-1}$, $p_n$, $p_{n+1}$, $p_{n+2}$ *суть соотвѣтственно числители, а* $q_{n-1}$, $q_n$, $q_{n+1}$, $q_{n+2}$ — *знаменатели* $(n-1)$*-ой*, $n$*-ой*, $(n+1)$*-ой и* $(n+2)$*-ой подходящихъ дробей нѣкоторой непрерывной дроби.*

Называя черезъ $a_{n+2}$ и $a_{n+1}$ соотвѣтственно $(n+2)$-ое $(n+1)$-ое чвствое непрерывной дроби, имѣемъ

$$p_{n+2}=a_{n+2}p_{n+1}+p_n, \quad p_{n+1}=a_{n+1}p_n+p_{n-1},$$

откуда

$$\frac{p_{n+2}}{p_n}=\frac{a_{n+2}p_{n+1}}{p_n}+1, \quad 1=\frac{a_{n+1}p_n}{p_{n+1}}+\frac{p_{n-1}}{p_{n+1}},$$

$$(1)\quad \frac{p_{n+2}}{p_n}-1=\frac{a_{n+2}p_{n+1}}{p_n}, \qquad (2)\quad 1-\frac{p_{n-1}}{p_{n+1}}=\frac{a_{n+1}p_n}{p_{n+1}},$$

Перемножая равенства (1) и (2), получимъ

$$(3)\quad \left(\frac{p_{n+2}}{p_n}-1\right)\left(1-\frac{p_{n-1}}{p_n}\right)=a_{n+2}a_{n+1}.$$

Подобнымъ же образомъ изъ равенствъ

$$q_{n+2}=a_{n+2}q_{n+1}+q_n, \quad q_{n+1}=a_{n+1}q_n+q_{n-1}$$

получимъ, что и

$$(4)\quad \left(\frac{q_{n+2}}{q_n}-1\right)\left(1-\frac{q_{n-1}}{q_n}\right)=a_{n+2}a_{n+1}.$$

Изъ равенствъ (3) и (4) слѣдуетъ, что

$$\left(\frac{p_{n+2}}{p_n}-1\right)\left(1-\frac{p_{n-1}}{p_n}\right)=\left(\frac{q_{n+2}}{q_{n+1}}-1\right)\left(1-\frac{q_{n-1}}{q_n}\right).$$

*О. Бивальдъ* (Славянскъ); *В Кованько* (Вышній Волочокъ); *В. Поповъ* (Ввлки, Харьк. губ.); *Л. Гейлеръ* (Харьковъ); *Н. Михальскій* (Екатеринославъ); *А. Кисловъ* (Москва); *В. Ревзинъ* (Сумы).

---

Редакторъ прив.-доц. В. Ф. Каганъ. Издатель В. А. Гернетъ.

Дозволено военной цензурой.

Типографія „Техникъ"—Одесса, Екатерининская, 58.